UDK 630*524.3
Оригинални научни рад

ПРИМЕНА МОДИФИКОВАНЕ БРИНКОВЕ ФУНКЦИЈЕ ЗА МОДЕЛИРАЊЕ ПРОФИЛА И ЗАПРЕМИНЕ ДЕБЛА

ПЕРО РАДОЊА
МИЛОШ КОПРИВИЦА
БРАТИСЛАВ МАТОВИЋ

Извод: У раду је разматрана могућност примене модификоване Бринкове функције код моделирања облика, односно профила дебла. Поступак оптимизације, односно проналажења оптималних параметара модификоване Бринкове функције је врло конвергентан, јер се оптимизирају само три параметра. Исто тако, ова функција има врло добру физичку интерпретацију, с обзиром да није сувише сложена и да у њој експлицитно фигурише величина прсног полупречника и укупна висина дебла. Модел на бази модификоване Бринкове функције врло успешно представља ток посматраног процеса. Истовремено ова се функција добро уклапа у расположиве (измерене) податке, што показује мала величина стандардне грешке.

Кључне речи: моделирање, профил дебла, експоненцијалне функције, модификована Бринкова функција, Левенберг-Марквардов алгоритам.

MODELLING STEM PROFILE AND VOLUME BY USING THE MODIFIED BRINK'S FUNCTION

Abstract: In the paper the possibilities of applying the modified Brink's function of modelling the form, i.e. the stem profile, have been studied. The optimisation procedure, i.e. the finding of optimal parameters of the modified Brink's function is highly convergent, because only three parameters are optimised. Also, this function has a very good physical interpretation, as it is not too complex and as it contains explicitly the values of radius at breast height and the total tree height. The model based on the modified Brink's function very successfully represents the course of the observed process. Simultaneously, this function matches the available (measured) data, i.e. the standard error is low.

Key words: modelling, stem profile, exponential functions, modified Brink's function, Levenberg-Marquardt's algorithm.

1. УВОД

Модели облика и кумулативне запремине стабла су веома важни при разматрању сортиментне структуре стабала и састојина. Због тога се у литератури може наћи велики број радова посвећен проблему што тачнијег одређивања функције, односно модела профила дебла, (Demaerschalk,

Др Перо Радоња, Др Милош Копривица, Мр Братислав Матовић, Институт за шумарство, Београд

Истраживање су финансирали Министарство науке и заштите животне средине Републике Србије и Јавно предузеће за газдовање шумама „Србијашуме", у оквиру пројекта: Метод процене квалитета и сортиментне структуре високих састојина букве у Србији (ТР-6804.А).

1973, Sloboda 1984, Brink, Gadow, 1986; Kozak, 1988, Avery, Burkhart, 1994; Riemer *et all.*,1995; Sloboda *et all*, 1998, Kublin, 2003, Lee. *et all*, 2003).

Јасно је да је за тачно представљање профила дебла потребно користити моделе са већим бројем параметара. Међутим, сложени модели нису подесни за успостављање генералних и принципијелних закључака на основу појединачних посматрања, односно мерења. С друге стране, корисно је када у моделу фигурише обим или пречник стабла на прсној висини, укупна висина стабла и сл., јер ове величине имају јасну физичку интерпретацију и лако их је измерити. Ова чињеница је искоришћена код модификоване Бринкове функције, па је уместо пет непознатих параметара (увођењем пречника на прсној висини и укупне висина стабла) број непознатих параметара смањен на три. Поређење профила дебла на бази коефицијената модела могуће је само ако модел има мали број параметара. Модели са малим бројем параметара корисни су у случају **генералног** приступа проблему, при анализи утицаја станишта и газдинских мера (третмана састојине) на облик стабла (Brink, Gadow, 1986; Riemer *et all.*,1995; Hui, Gadow, 1997).

У литератури се може наћи велики број предложених функција за моделирање облика дебла, а сви предложени модели могу да се поделе у две групе. У првој групи су модели засновани на једној функцији, а у другој модели где се процес моделирања обавља по сегментима. За различите сегменте (делове) профила дебла, користе се различите функције. Прва група модела профила дебла има очигледно бољу физичку интерпретацију, јер је разумљиво да је боље један физички процес представити једном функционалном зависношћу. Другим речима, када се посматра један физички процес у принципу боље је одредити једну функцију (па и по цену веће сложености и оптимизације више коефицијената), него поделити област на више сегмената и користити више функција.

У другу групу спадају модели засновани на примени *spline* функција, где се јављају тешкоће код физичке, односно биолошке, интерпретације добијеног модела. На пример, зашто се за описивање истог процеса користе две функције или зашто се неки измерени параметри користе код једне функције а други не, иако се односе на исти биолошки процес? Како то да измерен параметар процеса не утиче на неки сегмент посматраног процеса?

Присталице *spline* поступка инсистирају на једноставности добијених функција и да је ефекат коефицијената из једног сегмента практично занемарљив у другом сегменту. Дакле, не ради се о потпуној одсутности физичке, односно биолошке интерпретације већ о практичном занемаривању минорних ефеката. Када се ради о експоненцијалним законитостима ефекат једне експоненцијалне функције може бити стварно занемарљив у области друге, што је Бринк искористио при дефинисању своје функције.

2. МОДИФИКОВАНА БРИНКОВА ФУНКЦИЈА

Ако се посматра вретено стабла, независно од поступка моделирања, може да се закључи да постоје три, односно по неким ауторима, две области. У првој области, која почиње од површине земље, јавља се неилоидан облик, (Lee *et all*, 2003), у средњој области приближно цилиндричан, односно тачније параболоидан облик, а при врху, у трећој области, јавља се купаст облик. Неки аутори сматрају да постоје само две области. Бринк и Гадов (Brink , Gadow, 1986) сматрају да до превојне тачке морфолошке криве имамо једну експоненцијалну законитост, а после ње другу, такође, експоненцијалну законитост супротног знака. У овом случају се и експоненти разликују чак и до 30 пута (Riemer *et all.*, 1995).

Аутори радова (Avery, Burkhart, 1994; Kozak, 1988; Lee *et all*, 2003) разликују три сегмента односно области. Као најбољи модел можемо узети Лиов модел (Lee *et all*, 2003). Основна предност овог модела је што се континуалном променом експонента **r**, чија величина дефинише сегменте, губи подела на сегменте. У раду (Lee *et all.*, 2003) извршено је поређење Лиовог модела са Козаковим моделом базираном на променљивом коефицијенту и са сегментним полиномним моделом Maksa и Буркхарта, (Max, Burkhart, 1976).

Поред ове генералне поделе која се односи на избор модела у пракси при конкретној примени, могу да се уоче и поделе према вредностима параметара. Тако нпр. и ако се аутор одлучи за једну врсту модела, посебно се дефинишу модели за приобално, а посебно за планинско подручје и сл.

Модификована Бринкова функција, (Riemer *et all.*, 1995) развијена је са циљем да се отклони главни недостатак Бринкове функције (Brink, Gadow, 1986) а то је да се вредност функције не анулира у тачци $x=X$, тј. на самом врху стабла. У кондензованој форми (канонични облик) модификована Бринкова функција, (Riemer *et all.*, 1995), има облик:

$$y(x) = u + ve^{-px} - we^{qx} \tag{1}$$

Експоненцијална зависност за мале вредности $\boldsymbol{x}$ дефинисана је параметром $\boldsymbol{p}$ који има негативан предзнак у првој експоненцијалној функцији. Друга експоненцијална функција је супротног знака и дефинисана параметром $\boldsymbol{q}$ који има позитиван предзнак и који је често и до 30 пута мањи од параметра $\boldsymbol{p}$. Утицај ове функције је доминантан за велике вредности x. Параметар $\boldsymbol{u}$ представља транслацију по y оси, а параметри $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ утицај прве и друге експоненцијалне зависности на облик добијеног модела. Каноничан облик функције,(1) јасно показује све три компоненте ове функције.

Ако се искористи Бринкова функција (Brink, Gadow, 1986) и постави услов да модел односно функција облика дебла пролази кроз карактеристичну тачку, полупречник y_0 на прсној висини x_0, тј. $y(x_0) = y_0$, и кроз крајњу тачку $[X; y(X)]$, при чему је $y(X) = 0$, где је X укупна висина дубећег стабла, модификована Бринкова функција (Riemer *et all.*, 1995), добија облик:

$$y(x) = i + (y_0 - i)\frac{e^{p(x_0 - x)} - e^{p(x_0 - X)}}{1 - e^{p(x_0 - X)}} - i\frac{e^{q(x - X)} - e^{q(x_0 - X)}}{1 - e^{q(x_0 - X)}} \tag{2}$$

Вредност параметра $\boldsymbol{i}$ представља тачку заједничке асимптоте, односно величину полупречника када функција из области где преовладава утицај параметра $\boldsymbol{p}$ прелази у област где преовладава утицај параметра $\boldsymbol{q}$. Три непозната параметра $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ потребно је одредити неким поступком оптимизације. На основу овога јасно је да минималан сет улазних података мора садржати најмање три пара података. Када се на основу измерених, расположивих података, користећи неки поступак оптимизације, одреде непознати параметри ***i*, *p*** и ***q*** и дефинише модификована Бринкова функција, могуће је нацртати како саму функцију тако и њене компоненте.

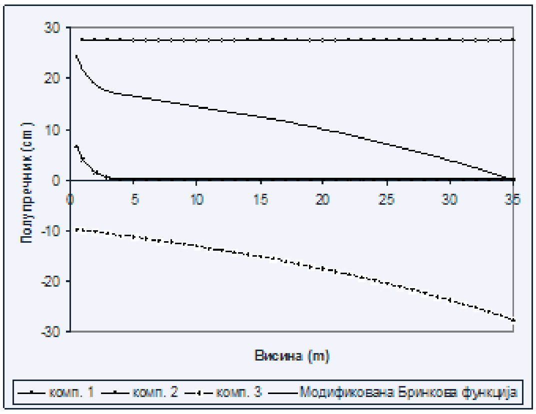
У циљу представљања компоненти функције потребно је одредити величине ***u*, *v*** и ***w*** :

$$u = \frac{i}{1-e^{q(x_0-X)}} + (y_0 - i)(1 - \frac{1}{1-e^{p(x_0-X)}}) \tag{3}$$

$$v = \frac{(y_0 - i)e^{px_0}}{1-e^{p(x_0-X)}} \tag{4}$$

$$w = \frac{ie^{-qX}}{1-e^{q(x_0-X)}} \tag{5}$$

Користећи податке из литературе (Riemer *et all*.,1995) и наведене релације од (1) до (5) на графикону 1 приказана је модификована Бринкова функција, која је представљена пуном линијом, као и њене компоненте. У овом конкретном случају узели смо да независно променљива ***x*** одговара висини ***h*,** а функција ***y*** полупречнику ***r***. Вредности полазних података су: x_0 = 1,3 m, y_0 = 20,5 cm i X = 35 m. Оптимални параметри су: i = 17,5, p = 1,0 и q = 0,03. Користећи релације (3), (4) и (5) добијамо: u = 27,51, v = 11,01 и w = 9,63, који нам омогућавају да лако нацртамо све три компоненте модификоване Бринкове функције, *(MATLAB* 2000).



Графикон 1- Модификована Бринкова функција и њене компоненте
Diagram 1- Modified Brink's function and its components

Прва компонента из релације (1), ***u*,** представљена је на графикону 1 хоризонталном линијом u= 27,51, подаци обележени са 'o'. Ова непроменљива компонента уведена релацијом (1) и дефинисана релацијом (3), је функција познатих полазних података, x_0, y_0 и X, као и три параметра ***i*, *p*** и

q који су одређени поступком оптимизације. Други члан из релације (1), одређује закривљеност на самом почетку, при чему је та закривљеност одређена параметром ***p***. На графикону 1 види се (подаци обележени са 'x'), да је после h = 4 m вредност другог члана приближно једнака нули. Основну закривљеност дефинише трећи члан из релације (1), односно величина експонента ***q***. Крива која одговара трећем члану, (подаци обележени са '+'), практично је заравњена до h = 5 m. Такође, види се да за h = 35 m прва и трећа компонента имају исте вредности само супротног знака. То је последица чињенице да је полупречник за ту висину једнак нули, а да друга компонента већ после h = 5 m има практично вредност нула. У посматраном случају (подаци из литературе) параметар ***q*** је приближно 30 пута мањи од параметра ***p***, (Reimer *et all*.,1995).

3. ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА ОПТИМАЛНИХ ПАРАМЕТАРА

Поступак одређивања оптималних параметара, у нашем случају, своди се на решавање проблема нелинеарне регресије. За решавање овог проблема искористићемо Левенберг-Марквардов (LM) метод. Познато је да метод најстрмијег (најбржег) смањивања вредности функције оцене, која је у нашем случају средња квадратна грешка, ради (функционише) најбоље када смо релативно далеко од минимума. У близини минимума увек постоји одређена заравњеност и у тој области најбоље ради метод развијања посматране функције у Тајлоров ред. Левенберг-Марквардов метод који се користи у нашем случају комбинује ове две методе и омогућује континуалан прелаз између ових метода током поступка односно током итерација.

Поступак оптимизације се завршава када се достигне величина циљне грешке или задати максималан број итерација. У овом другом случају поступак оптимизације није успео. Најбољи резултати се добијају када поступак оптимизације траје од 3 до 8 корака. На крају поступка оптимизације познате су вредности параметара ***i, p*** и ***q***, величина стандардне грешке S, број корака односно број итерација као и коваријансна матрица и резидуали.

4. МОДЕЛ БАЗИРАН НА ПРИМЕНИ МОДИФИКОВАНЕ БРИНКОВЕ ФУНКЦИЈЕ

За илустрацију примене модификоване Бринкове функције одабрана су стабла смрче различите старости: 39, 68, 95 и 130 година, укупне висине 16,1; 19,7; 36,15 и 32,6 m и величине прсних полупречника 6,9; 12,1; 17,4 и 21,6 cm, (табела 1.)

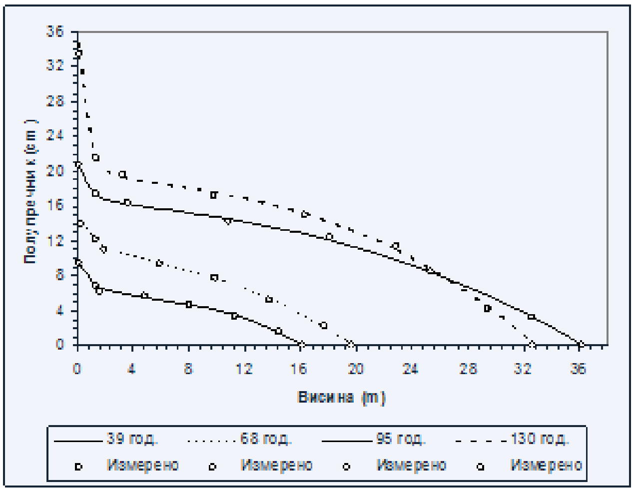
Tabela 1- Вредности полупречника за стабла различите старости
Table 1- Radius values of trees of different ages

Старост 39 година		Старост 68 година		Старост 95 година		Старост 130 година	
x	y	x	y	x	y	x	y
h [m]	r[cm]	h [m]	r[cm]	h [m]	r[cm]	h [m]	r[cm]
0,1	9,4	0,3	14,0	0,13	20,75	0,15	33,5
1,3	6,9	1,3	12,1	1,3	17,40	1,3	21,6
1,61	6,2	1,97	11,05	3,615	16,4	3,26	19,65
4,83	5,6	5,91	9,35	10,845	14,25	9,78	17,2
8,05	4,7	9,85	7,7	18,075	12,45	16,3	14,9
11,27	3,45	13,79	5,25	25,305	8,45	22,82	11,45
14,49	1,5	17,73	2,2	32,535	3,25	29,34	4,2
16,1	0	19,7	0	36,15	0	32,6	0

Поступком оптимизације за податке из табеле 1 добијају се следеће вредности непознатих параметара:

Старост (година)	i	p	q
39	5,9624254	1,0592831	0,15437158
68	10,505755	0,7368578	0,09038287
95	16,703317	1,4606545	0,05086180
130	19,611238	1,6779116	0,07031114

На графикону 2 представљене су функције профила за наведена стабла.



Графикон 2- Модели профила стабала различите старости
Diagram 2- Models of tree profiles of different ages

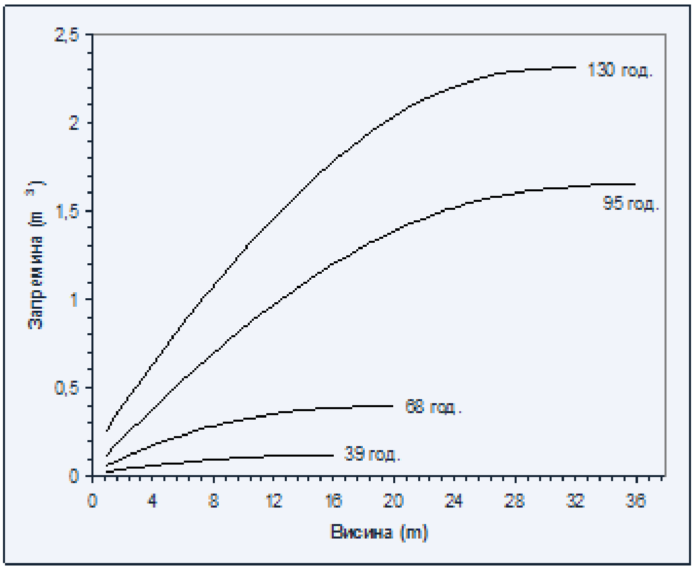
5. МОДЕЛИ КУМУЛАТИВНЕ ЗАПРЕМИНЕ

Запремина вретена стабла може се једноставно одредити под претпоставком да се посматрају релативно једноставна правилна геометријска тела. Међутим, то је и најмање тачан начин израчунавања запремине. С друге стране, ако се узме у обзир да су стабла углавном несиметрична, добили би се сувише сложени и у пракси непримењиви изрази за израчунавање запремине. Као компромис може се узети да се ради о симетричним геометријским телима. У том случају запремина се може добити као одређени интеграл од 0 до неке висине x, геометријског тела које је добијено ротацијом функције профила око x осе. Види се да се одређивање запремине вретена стабла практично своди на два корака. У првом кораку потребно је одредити функцију профила стабла, а затим израчунати одговарајући одређени интеграл.

У раду је дат модел кумулативне запремине када се за моделирање функције профила користи модификована Бринкова функција. У складу са претходним разматрањима, даћемо аналитички израз за функцију кумулативне запремине вретена, односно за запремину дебла до неке висине x. У случају коришћења модификоване Бринкове функције као модела функције профила, функција кумулативне запремине се очигледно може дефинисати као:

$$V(x) = \pi \int_0^x (u + ve^{-px} - we^{qx})^2 \, dx \tag{6}$$

Модели кумулативне запремине засновани на релацији (6) за раније коришћене примере, (табела 1), односно за 39, 68, 95 и 130-то годишња стабла, приказани су на графикону 3.



Графикон 3- Кумулативне запремине
Diagram 3- Cumulative volumes

6. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЗАПРЕМИНЕ ДЕБЛА И ЊЕГОВИХ ДЕЛОВА

Израчунавање запремине извршићемо помоћу програма написаног у MATLAB-у заснованог на релацији (6). Види се да користимо претпоставку да функција профила одговара модификованој Бринковој функцији. Израчунате запремине за четири раније коришћена стабла (табела 1), на основу поменутог програма за израчунавање запремине су: 0.1182, 0.3932, 1.6468 и 2.3086 m^3. По методу Hoenadl-a, (Mirković D., Banković S. 1993) који користи 5 секција једнаке релативне дужине добијамо следеће запремине: 0.10722, 0.37265, 1,60956 и 2.1562 m^3. Сматрамо да су наши резултати ближи стварним запреминама стабала јер метод Hoenadl-a, не апроксимира довољно тачно проширење стабла у делу жилишта и зато даје нешто ниже вредности запремине.

По методу запреминских таблица стабала (Koprivica M., Maunaga Z., 2005) односно по регресионој једначини (7)

$$V = 0,000395774dh - 0,000325622d^2 + 0,0000357415d^2h \qquad (7)$$

добијени су следећи резултати: 0.1355, 0.4103, 1.6683 и 2.1242 m^3. Прве три вредности су ближе резултатима који су добијени приликом моделирања профила стабла модификованом Бринковом функцијом, односно методу израчунавања запремине који је изложен у овом раду. За најстарије стабло величина запремине ближа је резултату добијеном по методу Hoenadl-a.

Као главна практична примена модификоване Бринкове функције је могућност одређивања потенцијалне сортиментне структуре дубећих стабала. Међутим у ту сврху потребно је претходно конструисати јединствен модел вретена стабла за неко географско подручје на основу довољног броја моделних стабала премерених секционом методом. Ова проблематика ће бити разматрана у неком од наредних радова. Модификована Бринкова функција израчунава са задовољавајућом тачношћу било који пречник дуж вретена стабла и запремину појединих делова вретена стабла.

Пример: Одредићемо запремину дела стабла од 0,25 до 3,25 m висине. Ако се посматрају четири стабла за која смо већ раније израчунали укупну запремину, запремине дела дебла од 0,25 до 3,25 m висине износе: 0,0438; 0,1320; 0,2845 и 0,4568 m^3, респективно.

7. ЗАКЉУЧАК

На основу модификоване Бринкове функције може се добити оптималан модел профила дебла и у условима када се поред основног сета података, величине прсног пречника и укупне висине стабла, располаже само са још три нова пара података. Добијен модел често је са нултом стандардном грешком. Јасно је да са општим расположивим методама, полиномне функције, *spline* поступак, комбинације експоненцијалних функција итд., не би били у стању да у оваквим условима добијемо модел који задовољава физичку страну процеса. Поступак на бази модификоване Бринкове функције обезбеђује повољан ток (облик) добијеног модела, као и добро уклапање у измерене податке.

У поступку прецизног израчунавања запремине стабла кључну улогу игра тачност функције профила дебла. Многа истраживања, као и истраживања која су непосредно претходила овом раду, потврдила су да модификована Бринкова функција може да обезбеди врло тачно представљање стварне функције профила дебла и задовољавајућу тачност израчунате запремине.

ЛИТЕРАТУРА

Avery, T.E., Burkhart, H.E. (1994): Forest Measurements, 4th Edition, McGraw-Hill, New York.

Brink, C., von Gadow, K. (1986): On the use of growth and decay functions for modelling stem profiles. EDV in Medizin and Biologie, 17 (1/2): 20-27.

Demaerschalk, J.P. (1973): Integrated systems for the estimations of tree taper and volume. Can. Journal for Forestry Research. 3(1), 90-94.

Hui,G.Y.,von Gadow, K. (1997): Entwicklung und Erprobung eines Einheitsschaftmodells fuer die Baumart Cunninghamia lanceolata. Forstwissenschaftliches Centralblatt 116, 315-321.

Koprivica M., Maunaga Z. (2005): Oblik i zapremina stabala u jednodobnim sastojinama smrče na području Bosne (rukopis). Šumarski fakultet , Banja Luka.

Kozak, A.. (1988): A variable-exponent taper equation, Can. Journal for Forestry Research 18, pp. 1363-1368.

Kublin, E. (2003): Einheitliche Beschreibung der Schaftform – Metoden und Programme – BDATPro. Forstwissenschaftliches Centralblatt 122, 183-200.

Lee, W-K., Seo, J-H., Son, Y-M., Lee, K-H., von Gadow, K. (2003): Modelling stem profiles for Pinus densiflora, in Korea. Forest Ecology and Management, 172(2003), Elsevier Science, pp. 69-77.

Max, T.A., Burkhart, H.E. (1976): Segmented polynomial regression applied to taper equations, Forest Science 22(33), pp. 283-289.

Mirković D., Banković S. (1993): Dendrometrija, Šumarski fakultet Univerziteta u Beogradu

Riemer, T., von Gadow, K., Sloboda., B. (1995): Ein Modell zur Beschreibung von Baumschaften, Allgemeine Forst-und Jagdzeitung 166(7), pp. 144-147.

Sloboda, B. (1984): Bestandesindividuelles biometrisches Schaftformmodell zur Darstelung und Vergleich fon Formigkeit und Sortimentausbeute sowie Inventur. Tagungsbereich d. Sektion Ertragskunde, Neustadt.

Sloboda, B., Gaffrey, D., Matsumara, N. (1998): Erfasung individueller Baumschaftformen und ihrer Dynamik durch Spline-Funktionen und Verallgemeinerung durch lineare Schaftformmodelle. Allgemeine Forst-und Jagdzeitung 169(2), pp. 29-38.

****MATLAB (2000): The MathWorks, Version 6.0.0.88, Release12, MATLAB 6 R12.

MODELLING STEM PROFILE AND VOLUME BY USING THE MODIFIED BRINK'S FUNCTION

Pero Radonja, Miloš Koprivica
Bratislav Matović

Summary

In the precise calculation of tree volume, as well as in the assessment of the tree and stand assortment structure, the key role is that of the precision of the stem profile function. For this reason, numerous papers in the literature have been devoted to the problem of the most precise determination of the stem profile model. This paper studies the possible application of the modified Brink's function. Many studies, as well as the study resulting in this paper, show that the modified Brink's function can very successfully represent the real function of the stem profile and the high precision of the calculated volume. The optimisation procedure, i.e. the finding of the optimal parameters of the modified Brink's function is highly convergent, because only three parameters are optimised. Also, this function has a very good physical interpretation, as it is not too complex and as it contains explicitly the values of radius at breast height and the total tree height. The first parameter defines the sweep at the very start of the model, directly above the ground level, the second one defines the basic sweep, i.e., up to the top of the tree, and the third parameter defines the size of the radius when the function, from the domain of the first parameter moves to the domain of the dominant effect of the second parameter. The volume is calculated by the program in MATLAB. The volume is obtained as the definite integral from 0 to a height x, of a geometric figure obtained by the rotation of the profile function around the x-axis. It is shown that Brink's function is one very good, both from the aspect of the form of the obtained model and from the aspect of the precision of the calculated tree volume.